



TITLE:

# イエスマノヴィッチの予想の一般化について (解析数論と数論諸分野の交流)

AUTHOR(S):

寺井, 伸浩; 高桑, 圭

---

CITATION:

寺井, 伸浩 ...[et al]. イエスマノヴィッチの予想の一般化について (解析数論と数論諸分野の交流). 数理解析研究所講究録 1999, 1091: 103-111

ISSUE DATE:

1999-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62905>

RIGHT:

## イエスマノヴィッチの予想の一般化について

足利工業大学 寺井伸浩 ( Nobuhiro Teraï )

学習院大学D3 高桑 圭 ( Kei Takakuwa )

1956年、Jeśmanowicz[J]は指数型不定方程式に関して次の様な予想(Jeśmanowiczの予想と呼ぶ)を提出した。

[予想1]. 正の整数 $a, b, c$ がピタゴラス数、即ち方程式

$$a^2 + b^2 = c^2, (a, b) = 1$$

を満足するとする。この時、 $x, y, z$ を変数とする不定方程式

$$a^x + b^y = c^z$$

の正の整数解は $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ のみである。

Sierpiński[S1]は $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ の場合を、Jeśmanowicz自身も $(a, b, c) = (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61)$ の場合を証明しており、Lu[Lu]は $(a, b, c) = (4n^2 - 1, 4n, 4n^2 + 1)$  ( $n$ は自然数)の場合を証明して、上の予想が成立する $a, b, c$ が無限に存在する事を示した。そして、いくつかの特別な $(a, b, c)$ に対して上の予想が成立する事が証明されているが(Ko[Ko], Guo and Le[GL], Le[Le1], [Le2], Takakuwa and Asaeda

[TA1], [TA2], Takakuwa [Ta1], [Ta2], Cao and Dong [CD]), 未だ完全には解決されていない。その論文の多くは、合同式等の初等的な方法や2次体、3次体等の理論によって予想を扱っている。

ここでは、上のJeśmanowiczの予想を含む次の予想について考察する。

【予想2】 正の整数  $a, b, c, d$  が、方程式

$$a^2 + db^2 = c^2, (a, b) = 1$$

を満足するとする。この時、 $x, y, z$  を変数とする不定方程式

$$a^x + db^y = c^z$$

の正の整数解は  $(x, y, z) = (2, 2, 2)$  のみである。

今回、我々は、Laurent, Mignotte 及び Nesterenko [LMN] の対数の一次形式の評価に関する結果 ([LMN], Corollary 2 及び 320 頁の表 2. Le [Le1] 参照。) を使って次の定理を証明した。

【定理】.  $l=1$  又は  $l \equiv 3 \pmod{8}$  である素数とし、 $l < 23865310019$  とする。正の整数  $a, b, c$  は  $a^2 + lb^2 = c^2, (a, b) = 1$  を満たすとし、

$$a \equiv 3 \pmod{8}, 4 \nmid b, \left(\frac{b}{a}\right) = -1, a \geq \lambda b,$$

但し、

$$\lambda = \sqrt{l} \left\{ \exp \left( 2 \left( \frac{\log l + 2}{\log 5} + 3231 \right)^{-1} \right) - 1 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

かつ  $\left(\frac{*}{*}\right)$  は Jacobi 記号、 $\lambda$  を仮定する。その時、不定方程式

$$a^x + lb^y = c^z \tag{1}$$

の正の整数解は  $(x, y, z) = (2, 2, 2)$  のみである。

[注意].  $l$  に対する  $\lambda$  の値を表にしていくつか挙げておく。

$\lambda$	$l$
40.19479...	1
69.62677...	3
133.34177...	11
175.25463...	19
263.67018...	43

そして、上の定理の系として、

[系].  $l \equiv 3 \pmod{8}$  である素数とし、 $l < 23865310019$  とする。そして、 $a = lv^2 - u^2 > 0$ ,  $b = 2uv$ ,  $c = u^2 + lv^2$  とし、 $u, v$  は  $2 \nmid v$ ,  $(u, v) = 1$ ,  $u \equiv -1 \pmod{l}$ ,  $a \geq \lambda b$  を満足するとする。その時、不定方程式

$$a^x + lb^y = c^z$$

の正の整数解は  $(x, y, z) = (2, 2, 2)$  のみである。

[注意]. 系より、 $l$  が  $l \equiv 3 \pmod{8}$  かつ  $l < 23865310019$  であるような素数の時、定理の条件を満たす正の整数  $a, b, c$  が無限に存在する事が分かる。

定理の証明は2つの部分に分かれる。即ち下に示す補題1と補題2を合わせると定理の証明が完成するのである。

[補題1].  $a, b, c, l$  は定理と同じとする。もし方程式(1)が正の整数解  $(x, y, z)$  を持つならば、

(i)  $x$  は偶数、 $y=1$ 、 $z$  は奇数

又は

(ii)  $x$  は偶数、 $y=2$ 、 $z$  は偶数

となる。

(証明)  $y=1, 2$  の時は、仮定から容易に扱える。 $y>2$  の時は、(詳細は省略するが)  $4|x, z, 2|y$  が言えて、(1) は次の様な形に帰着される。

$$(c^{\frac{x}{4}})^4 - (a^{\frac{x}{4}})^4 = 1(b^{\frac{y}{2}})^2.$$

すると次の Nagell の結果

[補題](Nagell[N], 定理 117).  $l$  は  $l \equiv 3 \pmod{8}$  である素数とする。その時、不定方程式

$$x^4 - y^4 = lz^2$$

は正の整数解を持たない。

より ( $l=1$  の場合は Fermat の結果である。Ribenoim[R], 36, 38 頁参照。)、これは解を持たず矛盾である。(補題 1 証明終)

[補題 2]. 正の整数  $a, b, c, d$  は  $a^2 + db^2 = c^2$ ,  $(a, b) = 1$ ,  $a > b > 1$ ,  $d \leq 23865310019$ ,  $a \geq \lambda b$ , 但し

$$\lambda = \sqrt{d} \left\{ \exp \left( 2 \left( \frac{\log d + 2}{\log 5} + 3231 \right)^{-1} \right) - 1 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

を満足すると仮定する。もしも、 $x \geq 2$  で  $y=1$  又は  $2$  であるなら、不定方程式

$$a^x + db^y = c^z \tag{2}$$

の正の整数解は  $(x, y, z) = (2, 2, 2)$  のみである。

(証明)  $x=2$  であるなら、 $y=2, z=2$  である事は容易に分かる。

そこで  $x \geq 3$  とする。

$a^2 + db^2 = c^2$  及び  $a^x + db^y = c^z$  から得られる、次の対数の一次形式について考える。

$$\Lambda_1 = 2 \log c - 2 \log a (> 0),$$

$$\Lambda_2 = z \log c - x \log a (> 0).$$

この時、 $\log(1+t) < t (t > 0)$  及び  $y \leq 2$  より、

$$0 < \Lambda_2 = \log\left(\frac{c^z}{a^x}\right) = \log\left(1 + \frac{db^y}{a^x}\right) < \frac{db^y}{a^x} \leq \frac{db^2}{a^x}$$

であるから、

$$\log \Lambda_2 < \log d + 2 \log b - x \log a \quad (3)$$

を得る。一方、前述の [LMN] の結果を用いて、

$$\log \Lambda_2 \geq -32.31 H^2 (\log a) (\log c) \quad (4)$$

但し、 $H = \max\{\log B + 0.18, 10\}$ 、 $B = \frac{x}{\log c} + \frac{z}{\log a}$ 、という  $\log \Lambda_2$  の下からの評価を得る。

(i)  $B \leq e^{9.82}$  の場合。この時、 $H=10$  なので、(3)、(4) より

$$\frac{\log d}{\log a} + 2 \cdot \frac{\log b}{\log a} + 3231 \log c > x$$

を得る。そして、 $a > b > 1$  だから、

$$\log d + 2 + 3231 \log c > x$$

となる。又  $\Lambda_1, \Lambda_2$  の定義から  $a$  を消去して、

$$x \Lambda_1 - 2 \Lambda_2 = (2x - 2z) \log c$$

となり、 $x-z > 0$  がすぐに言えるので、 $\Lambda_1, \Lambda_2 > 0$  より、

$$x = \frac{2x-2z}{\Lambda_1} \cdot \log c + \frac{2\Lambda_2}{\Lambda_1} > \frac{2}{\Lambda_1} \cdot \log c$$

となる。すると、

$$\log d + 2 + 3231 \log c > \frac{2}{\Lambda_1} \cdot \log c,$$

つまり

$$\Lambda_1 = \log\left(1 + \frac{db^2}{a^2}\right) > \frac{2 \log c}{\log d + 2 + 3231 \log c} = \frac{2}{\frac{\log d + 2}{\log c} + 3231} \geq \frac{2}{\frac{\log d + 2}{\log 5} + 3231}$$

( $c \geq 5$  より) を得る。故に

$$\frac{db^2}{a^2} > \exp\left(2\left(\frac{\log d + 2}{\log 5} + 3231\right)^{-1}\right) - 1,$$

つまり、

$$a < \sqrt{d} \left\{ \exp\left(2\left(\frac{\log d + 2}{\log 5} + 3231\right)^{-1}\right) - 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} b =: \lambda b$$

となる。それ故、もし  $a \geq \lambda b$  であるならば、(2) は正の整数解  $x, y, z$  ( $x \geq 3$ ) を持たない。

(ii)  $B > e^{9.82}$  の場合. この時は  $H = \log B + 0.18$  である。(3)、(4) より、

$$\frac{\log d + 2 \log b}{(\log a)(\log c)} - \frac{x}{\log c} > -32.31 H^2$$

を得る。そして  $\Lambda_2$  の定義より  $B = \frac{2x}{\log c} + \frac{\Lambda_2}{(\log a)(\log c)}$  であるから、

$$\frac{2(\log d + 2 \log b)}{(\log a)(\log c)} - B + \frac{\Lambda_2}{(\log a)(\log c)} > -64.62 H^2$$

となる。条件から、 $a \geq 2\lambda$ ,  $c \geq 2\sqrt{\lambda^2 + 1}$ ,  $\Lambda_2 < \frac{d}{2\lambda^3}$  がすぐに分かるので、

$$\begin{aligned} B &< \frac{2 \log d}{(\log a)(\log c)} + \frac{4 \log b}{(\log a)(\log c)} + \frac{\Lambda_2}{(\log a)(\log c)} + 64.62 H^2 \\ &< \frac{2 \log d}{(\log 2\lambda)(\log 2\sqrt{\lambda^2 + 1})} + \frac{4}{\log 2\sqrt{\lambda^2 + 1}} + \frac{d}{2\lambda^3(\log 2\lambda)(\log 2\sqrt{\lambda^2 + 1})} + 64.62 H^2 \end{aligned}$$

$$< 0.10392 \log d + 0.91175 + 0.0000005d + 64.62H^2 \quad (\lambda > 40.19479 \text{ より})$$

$$< 11936.05 + 64.62(\log B + 0.18)^2 \quad (d \leq 23865310019 \text{ より})$$

となる。すると  $B < 18398.05$  を得るが、これは  $B > e^{9.82} = 18398.050741\dots$  という仮定に矛盾している。(補題2 証明終)

補題1 と補題2 より定理の証明は完成した。

### 参考文献

- [CD] Z.-F. Cao and X.-L. Dong: On Teraï's Conjecture, (to appear).
- [GL] Y.-D. Guo and M.-H. Le: A note on Jeśmanowicz' Conjecture concerning Pythagorean Numbers, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 44 (1995), pp. 225 - 228.
- [J] L. Jeśmanowicz: Kilka uwag o liczbach pitagorejwkich (Some remarks on Pythagorean numbers), Wiadom. Mat., Ser. 2, 1(2)(1956), pp. 196-202.
- [Ko] C. Ko: On Pythagorean numbers (in Chinese), Acta Sc. Nat. Univ. Sichuan, 1(1958), pp. 73-80.
- [Le1] M.-H. Le: On Jeśmanowicz' Conjecture concerning Pythagorean Numbers, Proc. Japan Acad., 72, Ser. A (1996), pp. 97-98.
- [Le2] M.-H. Le: A note on Jeśmanowicz' Conjecture, Colloq. Math., 69 (1995), pp. 47-51.
- [Le3] M.-H. Le: A note on the Diophantine equation  $(m^3 - 3m)^x + (3m^2$



- $-1)^y = (m^2 + 1)^z$ , Proc. Japan Acad., 73, Ser. A (1997), pp. 148 - 149.
- [LMN] M. Laurent, M. Mignotte et Y. Nesterenko: Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation, J. Number Theory, 55(1995), pp. 285 - 321.
- [Lu] Lu Wen-Twan: On Pythagorean numbers  $4n^2 - 1$ ,  $4n$ ,  $4n^2 + 1$  (in Chinese), Acta Sc. Nat. Univ. Sichuan, 2(1959), pp. 39 - 42.
- [N] T. Nagell: Introduction to number theory, Chelsea Publishing Company, 1981.
- [S1] W. Sierpiński: O równaniu  $3^x + 4^y = 5^z$  (On the equation  $3^x + 4^y = 5^z$ ), Wiadom. Mat., Ser. 2, 1(2)(1956), pp. 194 - 195.
- [S2] W. Sierpiński: Elementary Theory of Numbers, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1988.
- [TA1] K. Takakuwa and Y. Asaeda: On a Conjecture on Pythagorean Numbers, Proc. Japan Acad., 69, Ser. A(1993), pp. 252 - 255.
- [TA2] K. Takakuwa and Y. Asaeda: ditto. II, ibid., 69, Ser. A(1993), pp. 287 - 290.
- [Ta1] K. Takakuwa: ditto. III, ibid., 69, Ser. A(1993), pp. 345 - 349.
- [Ta2] K. Takakuwa: A remark on Jeśmanowicz' Conjecture, Proc. Japan Acad., 72, Ser. A(1996), pp. 109 - 110.
- [Te1] N. Teraï: A note on certain exponential Diophantine equations, (to appear in Proceeding of Number Theory Conference in Eger, Hungary).

- [Te2] N.Terai: Application of a lower bound for linear forms in two logarithms to exponential Diophantine equations, (to appear in Acta Arith. ).
- [Te3] N.Terai: The Diophantine Equation  $a^x + b^y = c^z$ , Proc. Japan Acad., 70, Ser. A (1994), pp. 22-26.
- [Te4] N.Terai: ditto. II, ibid., 71, Ser. A (1995), pp. 109-110.
- [Te5] N.Terai: ditto. III, ibid., 72, Ser. A (1996), pp. 20-22.
- [TT1] N.Terai and K.Takakuwa: A note on the Diophantine Equation  $a^x + b^y = c^z$ , Proc. Japan Acad., 73, Ser. A (1997), pp. 161-164.
- [TT2] N.Terai and K.Takakuwa: On a generalization of the conjecture of Jeśmanowicz, (to appear in Tokyo J. Math.).
- [R] P.Ribenboim: 13 Lectures on Fermat's Last Theorem, Springer-Verlag, 1979.